V SIMPÓSIO DE ATUÁRIA

06 à 08 de Abril, 2016 : Simpósio de Atuária : Sergipe

Aplicação sobre dados de seguros

Transformações, distribuição da soma e função geradora de momentos

Prof. Me. Luiz Carlos Santos Júnior

Aracaju, abril de 2016

Roteiro

- Introdução
- Funções de Variáveis Aleatórias
- Transformação – Método Jacobiano
- Densidade da Soma (Convolução)
- Função Geradora de Momentos
- Observações

Prof. Me. Luiz Carlos Santos Jr.

Introdução

Introdução

Modelo de Risco Coletivo Anual

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Hipóteses:

a) As *severidades* $X_1, X_2, \dots, X_N$ são i.i.d.

b) As *severidades* $X_1, X_2, \dots, X_N$ são independentes da *frequência* N.

Introdução

Objetivos

$$Prêmio = P = E(S).(1+\theta)$$

$$Custo\ de\ Carregamento = \theta = \frac{P - E(S)}{E(S)}$$

OBS: Precisamos conhecer a distribuição do número total de sinistros produzidos numa carteira = Frequência (N) para conhecermos a "cara" da distribuição de Sinistro Agregado (S).

É possível obter a distribuição de S por meio de:

- Transformações de variáveis;
- Densidade da soma (caso geral);
- Densidade da soma (convolução);
- Função Geradora de momentos;
- ⋮

Introdução

É possível obter a distribuição de S por meio de:

- Transformações de variáveis;
- Densidade da soma (caso geral);
- Densidade da soma (convolução);
- Função Geradora de momentos;
- ⋮

Funções de Variáveis Aleatórias

Funções de Variáveis Aleatórias

Seja $Z = H_1(X, Y)$ uma função de duas variáveis aleatórias X e Y. Fica evidente que $Z = Z(.)$ é também uma variável aleatória. Consideremos a seguinte sequência de etapas:

(a) Executar o experimento ε e obter o resultado s;

(b) Calcular os números $X(s)$ e $Y(s)$;

(c) Calcular o número $Z = H_1(X, Y)$.

Funções de Variáveis Aleatórias

O valor de Z depende evidentemente de s, o resultado original do experimento. Ou seja, $Z = Z(s)$ é uma função que associa um número real $Z(s)$ a todo resultado $s \in S$. Algumas das importantes variáveis aleatórias, nas quais estaremos interessados, são:

$$X + Y, \qquad XY, \qquad X/Y, \qquad mín(X,Y), \qquad máx(X,Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

As seguintes variáveis aleatórias (unidimensionais) poderão interessar à questão:

$U = mín(X, Y)$ é menor número de sinistros ocorridos em dois meses;

$V = máx(X, Y)$ é maior número de sinistros ocorridos em duas carteiras quaisquer num dado período;

$W = X + Y$ é o valor monetário total pago a participantes na forma de dois benefícios num dado período.

Funções de Variáveis Aleatórias

Dada a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y), qual é a distribuição de probabilidade de $Z = H_1(X, Y)$?

Ou seja,

Dada a distribuição de probabilidade conjunta das severidades $(X_1, \dots, X_N)$, qual é a distribuição de probabilidade do sinistro agregado $S = X_1 + \cdots + X_N$?

Transformação

Método jacobiano

Transformação – Método Jacobiano

Sejam X_1 e X_2 V.A.'s conjuntamente contínuas com função densidade $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$. Seja $\aleph = \{(x_1,x_2)\colon f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) > 0\}$. Suponha que

1. $y_1 = g_1(x_1,x_2)$ e $y_2 = g_2(x_1,x_2)$ define uma transformação um a um de $\aleph$ para Ψ.
2. As primeiras derivadas parciais de $x_1 = {g_1}^{-1}(y_1,y_2)$ e $x_2 = {g_2}^{-1}(y_1,y_2)$ são contínuas em Ψ.
3. O jacobiano da transformação é não nulo para $(y_1,y_2) \in \Psi$. Com

$$\boldsymbol{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

Transformação – Método Jacobiano

Então a densidade conjunta de $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ e $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$ é dada por

$$\boldsymbol{f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = |J|.\, f_{X_1,X_2}\left[g_1{}^{-1}(y_1, y_2), g_2{}^{-1}(y_1, y_2)\right].\, I_{(y_1,y_2)}^{(\Psi)}}$$

Transformação – Método Jacobiano

Seja $f_{X,Y}(x,y) = K(x+y)I_{(0,1)}^{(X)}I_{(0,1)}^{(Y)}I_{(0,1)}^{(X+Y)}$. Encontre as distribuições conjunta e marginais de $X+Y$.

$$Z = X + Y \; (I)$$
$$W = Y - X \; (II)$$

$$W = Y - X \rightarrow Y = W + X \rightarrow Substitui\ (II) em\ (I) \rightarrow Z = X + (W + X) \rightarrow \ X = \boldsymbol{\frac{Z-W}{2} = g_1^{-1}(z,w)}$$

$$W = Y - X \rightarrow X = Y - W \rightarrow Substitui\ (II) em\ (I) \rightarrow Z = (Y - W) + Y \rightarrow Y = \boldsymbol{\frac{Z+W}{2} = g_2^{-1}(z,w)}$$

Transformação – Método Jacobiano

$$f_{Z,W}(z,w) = |J| \,.\, f\left(g_1^{-1}(z,w); g_2^{-1}(z,w)\right) \,.\, I^{(\cdot)}$$

$$¥\colon \left\{ f_{X,Y}^{(x,y)} > 0 \colon 0 < x < 1, 0 < y < 1 \right\}$$

$$0 < X < 1$$

$$0 < \frac{Z-W}{2} < 1$$

$$0 < Z - W < 2$$

$$W < Z < 2 + W$$

$$0 < Y < 1$$

$$0 < \frac{Z+W}{2} < 1$$

$$0 < Z + W < 2$$

$$-Z < W < 2 - Z$$

Transformação – Método Jacobiano

$$f_{Z,W}(z,w) = |\boldsymbol{J}| \, . \, \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{g_1^{-1}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}); \boldsymbol{g_2^{-1}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\right) . I_{(W,2+W)}^{(Z)} I_{(-Z,2-Z)}^{(W)}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial X}{\partial W} \\ \frac{\partial Y}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial W} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

Transformação – Método Jacobiano

$$f_{Z,W}(z,w) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{g_1^{-1}(z,w); g_2^{-1}(z,w)}\right) \cdot I_{(W,2+W)}^{(Z)} I_{(-Z,2-Z)}^{(W)}$$

$$f_{X,Y} = K(x+y)$$

$$f_{Z,W} = K\left(\frac{\boldsymbol{Z-W}}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{Z+W}}{\mathbf{2}}\right) = \boldsymbol{KZ}$$

$$\boldsymbol{f_{Z,W}(z,w)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{KZ} . \boldsymbol{I_{(W,2+W)}^{(Z)} I_{(-Z,2-Z)}^{(W)}}$$

Transformação – Método Jacobiano

$$\boldsymbol{f_Z(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f_{Z,W}(z,w)dw} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} KZ.\, I_{(W,2+W)}^{(Z)} I_{(-Z,2-Z)}^{(W)} dw$$

$$Z = X + Y \leftrightarrow S = X_1 + X_2, \text{ com}$$
$$Z = S \text{ (Sinistro agregado)}$$
$$X + Y = X_1 + X_2 \text{ (Severidades)}$$

Logo, S (sinistro agregado) possui função densidade de probabilidade

$$\boldsymbol{f_S(s)} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} KS.\, I_{(W,2+W)}^{(S)} I_{(-S,2-S)}^{(W)} dw$$

Densidade da Soma

Densidade da Soma

Dadas duas variáveis aleatórias contínuas X e Y com densidade conjunta $f_{x,y}$, então a função densidade

Em resumo, tem-se que

$$\boldsymbol{Z = X + Y}$$
$$\boldsymbol{V = X - Y}$$

De modo geral

$$\boldsymbol{f_{X+Y}(z) = f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-y, y)\,dy}$$

$$\boldsymbol{f_{X-Y}(w) = f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, x-v)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(v+y, y)\,dy}$$

Densidade da Soma

Se X e Y forem independentes a densidade conjunta pode ser escrita como o produto das densidades marginais, simplificando as expressões. No caso independente, a densidade da soma recebe o nome de convolução das densidades de X e Y.

$$\boldsymbol{f_{X+Y}(z) = f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)\, f_y(y)dy =}$$

$$\boldsymbol{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x)\, f_X(x)dx}$$

Densidade da Soma

- Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes com $f_X^{(x)} = 2x\, I_{(0,1)}^{(x)}$ e $f_Y^{(y)} = 2(1-y)\, I_{(0,1)}^{(y)}$. Determine a distribuição de $X+Y$.

$$0 < x < 1$$
$$0 < z - y < 1$$
$$y < z < \mathbf{1} + \boldsymbol{y}$$

$$Z(y) = y$$
$$Z(0) = 0$$
$$Z(1) = 1$$
$$Z(2) = 2$$

$$\boldsymbol{Z(y) = 1 + y}$$
$$Z(0) = 1 + 0 = 1$$
$$Z(1) = 1 + 1 = 2$$
$$Z(2) = 1 + 2 = 3$$

Densidade da Soma

$$f_Z^{(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-y,y)dy = \int_0^y [2x\,.\,(2-2y)]dy$$

$$f_Z^{(z)} = 2x\int_0^y (2-2y)dy = 2x\left[2\int_0^y dy - 2\int_0^y y\,dy\right]$$

$$f_Z^{(z)} = 2x\left[2(y)_0^y - 2\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^y\right] = 2x\left[2(y-0) - 2\left(\frac{y^2-0^2}{2}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{f_Z^{(z)} = 2x\left[2y - y^2\right].I_{(y,1+y)}^{(z)}}$$

Densidade da Soma

$$\boldsymbol{f_Z^{(z)} = 2x\left[2y - y^2\right].I_{(y,1+y)}^{(z)}}$$

$$Z = X + Y \leftrightarrow S = X_1 + X_2, \text{ com}$$

$$Z = S \text{ (Sinistro agregado)}$$

$$X + Y = X_1 + X_2 \text{ (Severidades)}$$

Logo, S (sinistro agregado) possui função densidade de probabilidade

$$\boldsymbol{f_S^{(s)}} = \mathbf{2}X_1\left[\mathbf{2}X_2 - X_2{}^{\mathbf{2}}\right]\boldsymbol{.I_{(X_2,1+X_2)}^{(s)}}$$

Função Geradora de Momentos

Função Geradora de Momentos

Se $X_1,\cdots,X_N$ são V.A.'s independentes e a fgm de V.A. cada existe para todo $-h < t < h$, para algum h > 0. Seja $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, então

$$\boldsymbol{m_Y(t) = E\left[e^{\sum x_i t}\right] = \prod_{i=1}^{n} mx_i(t)},$$

$$para - h < t < h.$$

Função Geradora de Momentos

Suponha que X_1 e X_2 são duas variáveis com distribuição normal padrão independentes. Sejam

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2$$
$$Y_2 = g_2(X_1, X_2) = X_1 - X_2$$

Encontre a conjunta de Y_1 e Y_2.

Função Geradora de Momentos

$$X_1 \perp X_2$$
$$X_1 \; e \; X_2 \sim Normal\ (0{,}1)$$

$$X \sim Normal\ (\mu, \sigma^2) \rightarrow M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$Como\ \mu = 0, \sigma^2 = 1 \rightarrow M_X(t) = e^{0t + \frac{1}{2}1^2 t^2} = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$M_{X_1,X_2}(t_1, t_2) = M_{X_1}(t_1).M_{X_2}(t_2) = e^{\frac{1}{2}{t_1}^2}.e^{\frac{1}{2}{t_2}^2} = e^{\frac{1}{2}({t_1}^2 + {t_2}^2)}$$

Função Geradora de Momentos

$$M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = E(e^{t_1Y_1+t_2Y_2}) = E\left(e^{t_1(X_1+X_2)+t_2(X_2-X_1)}\right)$$
$$M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = E(e^{t_1X_1+t_1X_2+t_2X_2-t_2X_1}) = E\left(e^{X_1(t_1-t_2)+X_2(t_1+t_2)}\right)$$
$$M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = E\left(e^{X_1(t_1-t_2)}.e^{X_2(t_1+t_2)}\right) = E\left(e^{X_1(t_1-t_2)}\right).E\left(e^{X_2(t_1+t_2)}\right)$$
$$M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = M_{X_1}(t_1).M_{X_2}(t_2) = e^{\frac{(t_1-t_2)^2}{2}}.e^{\frac{(t_1+t_2)^2}{2}}$$
$$M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = e^{\frac{t_1{}^2-2t_1t_2+t_2{}^2+t_1{}^2+2t_1t_2+t_2{}^2}{2}} = e^{\frac{t_1{}^2+t_2{}^2+t_1{}^2+t_2{}^2}{2}}$$
$$M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = e^{\frac{2t_1{}^2+2t_2{}^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}2t_1{}^2}.e^{\frac{1}{2}2t_2{}^2}$$

$$M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = M_{Y_1}(t_1).M_{Y_2}(t_2)$$

Logo Y_1 e Y_2 são independentes e tem distribuição Y_1 e $Y_2 \sim Normal(0,2)$.

Função Geradora de Momentos

$$M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = M_{Y_1}(t_1).M_{Y_2}(t_2)$$

$Y_1 = X_1 + X_2$, com

$Y_1 = S$ (*sinistro agregado*)

$X_1 + X_2$ (soma de *severidades*)

Logo, S (*sinistro agregado*) possui função geradora de momentos

$$M_{S,Y_2}(t_1,t_2) = e^{\frac{1}{2}2{t_1}^2}.e^{\frac{1}{2}2{t_2}^2} = M_S(t_1).M_{Y_2}(t_2) \rightarrow M_S(t_1) = e^{\frac{1}{2}2{t_1}^2}$$

Assim, S e Y_2 são i.i.d. e seguem distribuição $Normal(0,2)$.

Observações

Relação entre Bernoulli e Binomial

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição Bernoulli de parâmetro p. Defina $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, então S tem distribuição Binomial de parâmetros n e p.

Observações

Relação entre Exponencial e Gama

Se X_1 e X_2 são variáveis independentes com mesma distribuição Exponencial de parâmetro λ. Vamos verificar que $X_1 + X_2$ tem distribuição Gama com parâmetros $\alpha = 2$ e $\beta = \lambda$.

Observações

Reprodução de Normais

Dizemos que a distribuição normal se reproduz, porque a soma de Normais independentes também tem distribuição normal. Essa propriedade também vale para outros modelos, entre eles, Binomial, Poisson e Gama.

Observações

Implementação em R

Pacote: **actuar**

Funções:

- **severity()**
- **frequency()**
- **unroll()**
- **simul()**
- **aggregateDist()**
- **severity.portfolio()**

Referências

- BOWERS, Newton et al. **Actuarial Mathematics.** Illinois: The Society Of Actuaries, 1997.
- FERREIRA, Paulo Pereira. **Modelos de Precificação e Ruína para Seguros de Curto Prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- KAAS, R et al. **Modern actuarial risk theory**: using R. 2. ed. Berlim: Springer, c2008. 381 p. ISBN: 9783540709923.
- MAGALHÃES, Marcos. **Probabilidades e Variáveis Aleatórias**. São Paulo: Edusp, 1999.
- MEYER, Paul. **Probabilidade**: aplicações à estatística. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.
- RODRIGUES, José Ângelo. **Gestão de Risco Atuarial.** São Paulo: Saraiva, 2008.

V SIMPÓSIO DE
06 à 08 de Abril, 2016 : Simpósio de Atuária : Sergipe
ATUÁRIA

Muito obrigado!

Me. Luiz Carlos Santos Júnior
Departamento de Finanças e Contabilidade
Universidade Federal da Paraíba
luiz.atuario@gmail.com