

Interpolação Spline Cúbica

Robinson Tavoni e Luiz Carlos Santos Júnior

IBB-UNESP

PG Biometria

Interpolação Polinomial

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma outra função $g(x)$, escolhida entre uma classe de funções definida a priori e que satisfaz algumas propriedades.

Definição

Dados os pontos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$, portanto $n + 1$ pontos, fazer a interpolação polinomial é aproximar $f(x)$ por um polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n , tal que

$$f(x_k) = p(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

O que é o método Spline?

Splines, usadas em desenhos de engenharia, são réguas flexíveis, de madeira ou plástico, que podem ser curvadas de forma a passar por um dado conjunto de pontos $(x_i, f(x_i))$ chamados nós. Apesar de ser usada desde o século passado, só no fim da década de 60 foi desenvolvida a formulação matemática deste problema. Tal formalização possibilitou o desenvolvimento de vários sistemas computadorizados que utilizam aproximações gráficas de funções como CAD/CAM e TURBO GRAFIX.

Introdução

Dedução da Fórmula

Teorema

Spline Natural

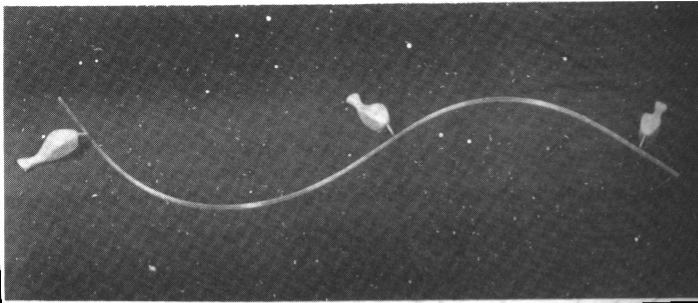
Spline Parabólica Emendada

Spline Cúbica Emendada

Exemplo

Considerações Finais

Referências Bibliográficas



Características

- Curva “bem comportada”
- Pontos igualmente espaçados na direção de x
- Pela teoria linear das vigas a quarta derivada do deslocamento de uma viga é nula, desde que não contém forças externas atuando na viga, isto é, $S^{(iv)}(0) = 0$ no intervalo entre os n pontos. Decorre que, integrando esta equação quatro vezes, $S(x)$ deve ser um polinômio cúbico em x em cada um destes intervalos.
- Uma viga que sofre somente a ação de forças externas, o deslocamento deve possuir as duas primeiras derivadas contínuas

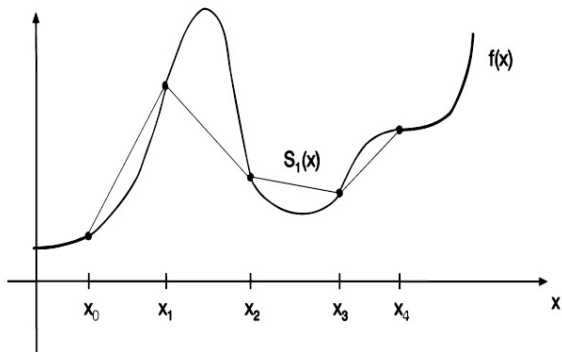


Figura: Curva Interpoladora

Dedução da Fórmula

Vamos escrever os polinômios na forma

$$S_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

$$S_2(x) = a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2, \quad x_2 \leq x \leq x_3$$

$\vdots$

$$S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1},$$

$$x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

Derivada de Primeira Ordem

$$S'_1(x) = 3a_1(x - x_1)^2 + 2b_1(x - x_1) + c_1, \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

$$S'_2(x) = 3a_2(x - x_2)^2 + 2b_2(x - x_2) + c_2, \quad x_2 \leq x \leq x_3$$

⋮

$$S'_{n-1}(x) = 3a_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + 2b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1},$$

$$x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

Derivada de Segunda Ordem

$$S_1''(x) = 6a_1(x - x_1) + 2b_1, x_1 \leq x \leq x_2$$

$$S_1''(x) = 6a_2(x - x_2) + 2b_2, x_2 \leq x \leq x_3$$

⋮

$$S_{n-1}''(x) = 6a_{n-1}(x - x_{n-1}) + 2b_{n-1}, x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

Propriedade 1

$S(x)$ interpola os pontos (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, isto é,

$$S(x_1) = y_1, S(x_2) = y_2, \dots, S(x_n) = y_n.$$

De onde obtemos:

$$d_1 = y_1, d_2 = y_2, \dots, d_{n-1} = y_{n-1}.$$

Sabemos que $S(x_n) = y_n$, $x_n - x_{n-1} = h$ e que

$$S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}$$

daí obtemos:

$$a_{n-1}h^3 + b_{n-1}h^2 + c_{n-1}h + d_{n-1} = y_n$$

Propriedade 2

Como $S(x)$ é contínua para $x_1 \leq x \leq x_n$, segue que em cada ponto x_i de $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ devemos ter

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i), i = 2, 3, \dots, n - 1$$

$$a_1 h^3 + b_1 h^2 + c_1 h + d_1 = y_2$$

$$a_2 h^3 + b_2 h^2 + c_2 h + d_2 = y_3$$

⋮

$$a_{n-2} h^3 + b_{n-2} h^2 + c_{n-2} h + d_{n-2} = y_{n-1}$$

Propriedade 3

$S'(x)$ é contínua em $x_1 \leq x \leq x_n$, isto é, $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ para $i = 2, 3, \dots, n-1$. O que nos fornece

$$3a_1h^2 + 2b_1h + c_1 = c_2$$

$$3a_2h^2 + 2b_2h + c_2 = c_3$$

$$\vdots$$

$$3a_{n-2}h^2 + 2b_{n-2}h + c_{n-2} = c_{n-1}$$

Propriedade 4

$S''(x)$ é contínua em $x_1 \leq x \leq x_n$, isto é, $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$.

Portanto,

$$6a_1h + 2b_1 = 2b_2$$

$$6a_2h + 2b_2 = 2b_3$$

$$\vdots$$

$$6a_{n-2}h + 2b_{n-2} = 2b_{n-1}$$

Podemos simplificar nosso sistema expressando as incógnitas a_i , b_i , c_i e d_i em termos de novas quantidade incógnitas

$$M_1 = S''(x_1), M_2 = S''(x_2), \dots, M_n = S''(x_n).$$

De modo que

$$b_1 = \frac{1}{2}M_1, b_2 = \frac{1}{2}M_2, \dots, b_{n-1} = \frac{1}{2}M_{n-1}$$

Teorema

Definição

Dados os pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ com $x_{i+1} - x_i$, a curva spline cúbica

$$S = \begin{cases} S_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, \\ \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x) = a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2, \\ \quad x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) \\ \quad + d_{n-1}, \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Teorema

Definição

que interpola estes pontos tem os coeficientes dados por

$$a_i = \frac{(M_{i+1} - M_i)}{6h}$$

$$b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{(M_{i+1} + 2M_i)h}{6}$$

$$d_i = y_i$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$, e onde, $M_i = S''(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = 6(y_1 - 2y_2 + y_3)/h^2$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = 6(y_2 - 2y_3 + y_4)/h^2$$

$\vdots$

$$M_{n-2} + 4M_{n-1} + M_n = 6(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)/h^2$$

Forma Matricial

Forma matricial

$$\begin{pmatrix}
 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 M_1 \\
 M_2 \\
 M_3 \\
 \vdots \\
 M_{n-2} \\
 M_{n-1} \\
 M_n
 \end{pmatrix}
 = \frac{6}{h^2}
 \begin{pmatrix}
 y_1 - 2y_2 + y_3 \\
 y_2 - 2y_3 + y_4 \\
 y_3 - 2y_4 + y_5 \\
 \vdots \\
 y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\
 y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\
 y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n
 \end{pmatrix}
 \quad (3.1)$$

Observe que o sistema tem $n-2$ equações e n incógnitas. Para resolver isso precisamos impor duas condições adicionais e nos próximos slides apresentaremos formas de fazer isso.

Spline Natural

Definição

A segunda derivada da spline é zero nos extremos, ou seja,

$$M_1 = 0,$$

$$M_n = 0.$$

Spline Natural - Forma Matricial

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Spline Parabólica

Definição

As duas restrições adicionais impostas para este tipo de spline são

$$M_1 = M_2$$

$$M_n = M_{n-1}$$

Spline Parabólica - Forma Matricial

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Spline Cúbica Emendada

Definição

Para este tipo de spline nós impomos as condições adicionais

$$M_1 = 2M_2 - M_3$$

$$M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2}$$

Spline Cúbica Emendada - Forma Matricial

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Exemplo

É um fato bastante conhecido que a densidade da água atinge um máximo a uma temperatura ligeiramente acima do ponto de congelamento. A tabela dá a densidade da água em gramas por centímetro cúbico para cinco temperaturas igualmente espaçadas no intervalo de -10°C a 30°C .

Temperatura($^{\circ}\text{C}$)	Densidade(g/c^3)
-10	0,99815
0	0,99987
10	0,99973
20	0,99823
30	0,99567

Exemplo - Spline Parabólica

Vamos interpolar estas cinco medidas temperatura-densidade com uma spline parabólica emendada.

Sejam os pontos

$$x_1 = -10, y_1 = 0,99815$$

$$x_2 = 0, y_2 = 0,99987$$

$$x_3 = 10, y_3 = 0,99973$$

$$x_4 = 20, y_4 = 0,99823$$

$$x_5 = 30, y_5 = 0,99567$$

Calculando

$$6[y_1 - 2y_2 + y_3]/h^2 = -0,0001116$$

$$6[y_2 - 2y_3 + y_4]/h^2 = -0,0000816$$

$$6[y_3 - 2y_4 + y_5]/h^2 = -0,0000636$$

O sistema linear para a spline parabólica emendada é dado por

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0001116 \\ -0,0000816 \\ -0,0000636 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Assim temos

$$M_1 = M_2 = -0,00001973$$

$$M_3 = -0,000011293$$

$$M_4 = M_5 = -0,00001013$$

Pelo Teorema 17 temos:

$$S(x) = \begin{cases} -0,00000987(x+10)^2 + 0,0002707(x+10) + 0,99815, & -10 \leq x \leq 0 \\ 0,000000113(x-0)^3 - 0,00000987(x-0)^2 + 0,0000733(x-0) + 0,99987, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0,000000047(x-10)^3 - 0,00000647(x-10)^2 + 0,0000900(x-10) + 0,99973, & 10 \leq x \leq 20 \\ -0,00000507(x-20)^2 + 0,0002053(x-20) + 0,99823, & 20 \leq x \leq 30 \end{cases} \quad (7.6)$$

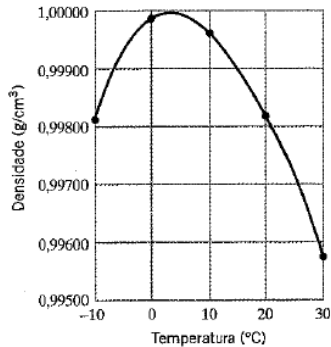


Figura: Gráfico Spline Parabólica Emendada

Observações - Spline Parabólica Emendada

Como $M_1 = M_2$ e $M_n = M_{n-1}$ implica que $a_1 = 0$ e $a_{n-1} = 0$, isto é, reduz a uma curva parabólica nos intervalos extremos.

Exemplo - Spline Natural

Modelando o exemplo através da interpolação spline natural.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0001116 \\ -0,0000816 \\ -0,0000636 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Resultados

$$M_1 = 0, M_2 = -0,0000252, M_3 = -0,0000108,$$

$$M_4 = -0,0000132, M_5 = 0$$

$$a_1 = -0,00000042, a_2 = 0,00000024,$$

$$a_3 = -0,00000004, a_4 = 0,00000022$$

$$c_1 = 0,000214, c_2 = 0,000088$$

$$c_3 = -0,000092, c_4 = -0,000212$$

$$S(x) = \begin{cases} -0,00000042(x+10)^3 + 0,000214(x+10) + 0,99815, & -10 \leq x \leq 0 \\ 0,00000024(x-0)^3 - 0,0000126(x-0)^2 + 0,000088(x-0) + 0,99987, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0,00000004(x-10)^3 - 0,0000054(x-10)^2 - 0,000092(x-10) + 0,99973, & 10 \leq x \leq 20 \\ 0,00000022(x-20)^3 - 0,0000066(x-20)^2 - 0,000212(x-20) + 0,99823, & 20 \leq x \leq 30 \end{cases} \quad (7.8)$$

Exemplo - Spline Cúbica Emendada

Agora interpolaremos com uma spline cúbica emendada.

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0001116 \\ -0,0000816 \\ -0,0000636 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

Exemplo - Spline Cúbica Emendada

Resultados:

$$M_1 = -0,0000241, M_2 = -0,0000186, M_3 = -0,0000131,$$

$$M_4 = -0,0000106, M_5 = -0,0000081$$

Resultados

$$a_1 = a_2 = 0,000000091667, a_3 = a_4 = 0,000000041667$$

$$c_1 = 0,0002833, c_2 = 0,00006983$$

$$c_3 = 0,00004633, c_4 = -0,0000207$$

Exemplo - Função Spline Cúbica Emendada

$$S(x) = \begin{cases} -0,000000091667(x+10)^3 - 0,00001205(x+10)^2 + 0,0002833(x+10) + 0,99815, & -10 \leq x \leq 0 \\ -0,000000091667(x-0)^3 - 0,0000093(x-0)^2 + 0,00006983(x-0) + 0,99987, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0,000000041667(x-10)^3 - 0,00000655(x-10)^2 + 0,00004533(x-10) + 0,99973, & 10 \leq x \leq 20 \\ 0,000000041667(x-20)^3 - 0,0000053(x-20)^2 - 0,0000207(x-20) + 0,99823, & 20 \leq x \leq 30 \end{cases} \quad (7.10)$$

Observações - Spline Cúbica Emendada

Observe que $S(x)$ consiste de uma única curva cúbica nos dois primeiros intervalos e em outra única curva cúbica nos dois últimos intervalos.

Considerações Finais

Além de produzir excelentes curvas interpoladoras, splines cúbicas e suas generalizações são úteis para derivação e integração numérica, para a solução numérica de equações diferenciais e integrais e na teoria de otimização.

Referências bibliográficas

-  Howard, Anton e Rorres, Chris **Álgebra Linear com Aplicações**, 8ª edição, Porto Alegre, Bookman, 2001.
-  Ruggiero, M. A. G. e Lopes, V. L. R. **Cálculo Numérico - aspectos teóricos e computacionais**, São Paulo: Pearson, 2ª edição, 1996.
-  Arenales, S. e Darezzo A. **Cálculo Numérico - aprendizagem com apoio de software**, São Paulo: Cengage, 2008.



<http://www.cp.utfpr.edu.br/chiesse/Pesquisa/NURBS/Splines>.
Disponível em 07 de junho de 2015.

Referências bibliográficas



<http://www2.ic.uff.br/~aconci/splineatual.html>,
Disponível em 07 de junho de 2015.